УДК 519.688

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ В ГРУППАХ ПОДСТАНОВОК С НАРУШЕННОЙ СИММЕТРИЕЙ

¹Рау В.Г., ²Ломтев Л.А., ³Рау Т.Ф., ³Горшков К.А., ³Никитин О.Р.

¹Владимирский филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, e-mail: vgrau@mail.ru;

²ООО Производственное объединение «КЛИМАТВЕНТМАШ», e-mail: leontijlomtev@rambler.ru;

³ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых», Владимир, e-mail: godograff@list.ru

В серии компьютерных экспериментов на основе программ расчета групп симметрии при изучении структур с нарушенной симметрией обнаружены новые множества с «нулем», «единицей», без обратных элементов, с конвергентными (сходимостью) и дивергентными (расходимостью) свойствами орграфа структуры. В работе продемонстрировано, что существует возможность перехода от множества преобразований с конвергентными свойствами орграфа структуры к структурам множеств с дивергентными свойствами заменой неклассических матриц с нарушенной симметрией на обратные матрицы подстановок. А также показана конкретная корреляция этих свойств с моделями накопления и послонного роста, используемыми в нанокластерном анализе, радиотехнике, при математическом описании состояний некоторых экономических систем и объектов кристаллохимии, что является наглядной демонстрацией принципа «диссимметрии» П. Кюри.

Ключевые слова: группы симметрии подстановок, таблицы Кэли, таблицы групп преобразований с нарушенной симметрией, конвергентные графы структуры

COMPUTER EXPERIMENTS IN GROUPS OF PERMUTATIONS WITH BROKEN SYMMETRY

¹Rau V.G., ²Lomtev L.A., ³Rau T.F., ³Gorshkov K.A., ³Nikitin O.R.

¹Vladimir Branch of the Russian Academy of National Economy and Public Administration under the President of the Russian Federation, Vladimir, e-mail: vgrau@mail.ru;

²LLC Production Association «CVM», Vladimir, e-mail: leontijlomtev@rambler.ru;

³Vladimir State University n.a. A.G. and N.G. Stoletovs, Vladimir, e-mail: godograff@list.ru

In computer simulations, by studying the tables, sets of binary transformations with broken symmetry we've discovered the new sets with «zero» and «one» without inverse elements, with convergent and divergent properties of structure's oriented graphs. It is possible to continue from a variety of transformations with convergent properties of oriented graphs' structure to the structure of the set with divergent properties. A correlation of these properties with the accumulation models and the layer growth used in the analysis of the nanoclusters, radio technique, as well as the description of the conditions of some economic systems and the chemistry of crystals. This is a clear demonstration of the principle of «dissymmetry» Pierre Curie.

Keywords: symmetry group of permutations, Cayley table, table groups with broken symmetry, convergent graphs of structure

С целью расширения возможностей компьютерного моделирования различных систем и процессов проведена серия компьютерных экспериментов, выполненных на основе программ расчета групп симметрии. Выберем вначале для описания классической симметрии простых геометрических фигур хорошо известный в теории групп симметрии [5] способ представления, основанный на построении таблиц Кэли. Каждая операция в таблице Кэли кодируется двухстрочной матрицей перестановок или подстановок (permutation and substitution) вида

$$g[1] = \begin{pmatrix} 012345 \\ 023451 \end{pmatrix},$$

где $g[1]$ – символ 1-й операции. В данном случае эту конкретную запись можно от-

нести к операции поворота правильного пятиугольника (или к циклической перестановке его вершин) по направлению, определенному ориентированным циклическим графом (рис 1, а). В работе [3] показан способ перехода к более сложной структуре с использованием операции свертки (копирования). Этот прием основан на замене каждой точки структуры точками нового фрагмента, что порождает в данном случае мозаику с симметрией 5-го порядка (рис 1, б). Результаты компьютерного расчета таблицы умножения подстановок (таблицы Кэли) для подгруппы поворотов правильного пятиугольника (рис. 1, а) представлены в табл. 1.

Векторами на рис. 1, а выделена структура орграфа операции подстановок $g[1]$ из табл. 1.

Рис. 1. Пятиугольник с центральной точкой (а) и мозаика, выполненная на его основе (б) методом копирования (свертки)

Таблица 1

Таблица Кэли подгруппы поворотов пятиугольника и структура операций

$g[0] = (0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5);$	$(0)(1)(2)(3)(4)(5);$	$g[0]$	$g[1]$	$g[2]$	$g[3]$	$g[4]$
$g[1] = (0\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1);$	$(0)\ (1\ 2\ 3\ 4\ 5);$	$g[1]$	$g[2]$	$g[3]$	$g[4]$	$g[0]$
$g[2] = (0\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2);$	$(0)\ (1\ 3\ 5\ 2\ 4);$	$g[2]$	$g[3]$	$g[4]$	$g[0]$	$g[1]$
$g[3] = (0\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3);$	$(0)\ (1\ 4\ 2\ 5\ 3);$	$g[3]$	$g[4]$	$g[0]$	$g[1]$	$g[2]$
$g[4] = (0\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4);$	$(0)\ (1\ 5\ 4\ 3\ 2);$	$g[4]$	$g[0]$	$g[1]$	$g[2]$	$g[3]$

В теории групп показано, что всякая конечная группа симметрии изоморфна соответствующей группе подстановок (теорема Кэли), поэтому для операции, выбранной выше, возможно ввести «матричное представление», описывающее вращение в двумерном пространстве на угол 72° вокруг центральной точки. Выбор в пользу представления с помощью подстановок в данной работе сделан на основании двух соображений. Во-первых, из-за простоты записи операции, кодировку которой можно еще упростить, записывая только нижние строки. В приведенном примере это будет выглядеть следующим образом: $g[1] = (023451)$. Во-вторых, вследствие независимости кодировки операций подстановок от размерности пространства, что особенно важно, когда речь идет о пространствах состояний, топология и размерность которых могут быть и неизвестными.

Модель группы подстановок с нарушенной симметрией

Дальнейший переход к нарушенной симметрии обусловлен большим количеством проблем, возникающих в различных областях науки в тех случаях, когда появляется необходимость описания явлений роста и эволюционных процессов, но, как

известно, только «диссимметрия творит явление» (принцип П. Кюри). Под термином «диссимметрия» будем понимать не только «недостаточную» симметрию, но и «псевдосимметрию» [6], а также «нарушенную симметрию».

Авторам данной работы не удалось обнаружить ни одного примера научных исследований процессов накопления, роста и эволюции, в которых принцип Кюри не выполняется в той или иной форме. Поэтому в философии естествознания и социально-экономических процессах он играет существенную роль. Нашей задачей явился поиск математической модели нарушенной симметрии, для чего были использованы разработанные ранее компьютерные методики построения и «визуализации» групп симметрии [8].

В частности, ниже представлены начальные результаты новых исследований, которые привели к обнаружению во множестве бинарных операций полугрупп подстановок с интересными свойствами, названных нами группами нарушенной симметрии (ГНС). «Работу» принципа нарушенной симметрии продемонстрируем на двух примерах, относящихся к различным направлениям исследований: естественнонаучному и социально-экономическому.

Рис. 2. Два этапа реального процесса роста кристаллов гипосульфита из расплава

Рис. 3. Диаграммы модельного (а) и реального изменения цены на золото (б)

Пример 1. Все известные физические эффекты в кристаллах описываются на основе принципа Неймана – Кюри: симметрия структуры и симметрия «воздействия» на структуру складываются таким образом, что в результате остаются только те элементы (преобразования), которые являются общими. Рост кристаллов, в частности, начинается с одной точки (дефекта), в которой нарушена симметрия однородности расплава (рис. 2).

Пример 2. Рассмотрим процесс роста цен, который возник в результате нарушения симметрии однородного «хаоса» на бирже, торгующей золотом [3]. Процесс изменения цен (с 2000 г.) можно описать с помощью использования в качестве «биржевого робота» модели мозаики [2] с симметрией 5-го порядка (по рис. 1, б). Числа Фибоначчи, которые часто возникают в экономических моделях, были обнаружены в мозаике при подсчете количества пятиугольников, распределенных на рис. 1, б по слоям. Таким образом, получается числовой набор, представленный на диаграмме (рис. 3, а). Поиск аналогичной реальной финансово-экономической системы привел к хорошему совпадению максимумов чисел на диаграмме со сводками на Лондонской бирже, торгующей золотом (рис. 3, б). На-

блюдается совпадение положений максимумов в модели (рис. 3, а) с максимумами реальной диаграммы цен на золото (рис. 3, б) и соответствие числам типа Фибоначчи. Этот факт, в частности, позволяет прогнозировать положение во времени следующего взлета цены до середины 2017 г. с резким последующим падением и возможным очередным резким подъемом только через 8 лет. Прогноз строится по точкам фигуры с симметрией оси 5-го порядка (рис. 1, б) и диаграмме (рис. 3, а).

Важно определить, каким образом возникло это нарушение однородной и изотропной симметрии биржевого «хаоса» с образованием симметрии 5-го порядка, отраженной в числах (рис. 3). Возможны два варианта: либо естественным путем, либо направленным действием интеллекта. В первом случае – «Природа Рынка играет» с нами, а во втором – мы играем друг с другом. Исследование нарушенной симметрии, таким образом, становится все более актуальным не только для современной физики, которая представляет собой локально перенормируемую квантовую теорию неабелевых калибровочных полей со спонтанно нарушенной симметрией, но и для других реальных систем, в каждой из которых появляется свой «бозон Хиггса». В микробиологии и генной

инженерии хорошо известна роль «дефектов» в кодировке ДНК [7]. В радиоэлектронике нарушение симметрии антенны токами проводимости приводит к ее диаграмме направленности [4]. Технически, решаемая в данной статье задача ближе всего подходит к проблемам «ошибок кода» при передаче информации в компьютерных сетях и программах расчетов с большими числами.

Введем простой дефект, то есть «случайную ошибку кода» в записи элемента $g[1]$ в программу расчета группы подстановок и таблицы умножения: вместо $g[1] = (023451)$ (из табл. 1) запишем курсивом новую *подстановку* следующим образом: $g[1] = (023431)$. Если затем произвести такие же операции умножения, которые были применены ранее при построении таблицы Кэли, то получим новую конечную таблицу подмножества произведений бинарных операций (табл. 2).

Очевидно, что эта таблица не является таблицей Кэли, так как в ней отсутствуют, в частности, обратные элементы, поэтому можно говорить, что «ошибка» в записи (в кодировке) элемента группы симметрии привела к нарушению симметрии. Исходя из принципа Кюри, предполагаем, что следует ожидать появление новых свойств в структурах, представленных таким множеством преобразований. Расширим новую группу очередной «неклассической операцией» подстановки $g[5] = (012343)$, не изменяя правила произведения. В компьютерном эксперименте, выполненном по програм-

ме расчета таблицы умножения элементов группы, получим расширенное конечное множество операций (табл. 3).

Легко, в частности, проверить, что $g[1] \times g[2] = (023431) \times (034342) = (043433) = g[3]$.

Будем по-прежнему считать, как это было показано в работе [8], что каждому преобразованию из элементов множества бинарных преобразований симметрии можно поставить в соответствие (визуализировать) некоторую структуру, описание преобразований в которой следует вести в терминах «подстановки», анализируя структуру самой подстановки. Новые неклассические «подстановки» (substitution, но не permutation) группы с нарушенной симметрией, записанные теперь в табл. 3 (если сравнивать с табл. 1), получают двумерную (в виде «цветного ожерелья») или одномерную геометрическую интерпретацию (в виде диаграмм). Демонстрационный результат визуализации подстановок представлен на рис. 4 для трех произвольно выбранных операций из этой таблицы.

В одном из проведенных нами компьютерных экспериментов с неклассическими подстановками числовое множество из 34 значений чисел составило множество преобразований, содержащее 91 элемент в таблице произведений. Оказалось, что в этой полной таблице умножения удастся выделить 4 операции (включая $g[0]$), которые образуют небольшое замкнутое подмножество преобразований, приведенное в табл. 4. Это подмножество является циклическим с образующим элементом $g[1]$.

Таблица 2

Таблица 5x5 подмножества произведений бинарных операций на множестве из 6 чисел

$g[0] = (0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5);$	$g[0]$	$g[1]$	$g[2]$	$g[3]$	$g[4]$
$g[1] = (0\ 2\ 3\ 4\ 3\ 1);$	$g[1]$	$g[2]$	$g[3]$	$g[4]$	$g[3]$
$g[2] = (0\ 3\ 4\ 3\ 4\ 2);$	$g[2]$	$g[3]$	$g[4]$	$g[3]$	$g[4]$
$g[3] = (0\ 4\ 3\ 4\ 3\ 3);$	$g[3]$	$g[4]$	$g[3]$	$g[4]$	$g[3]$
$g[4] = (0\ 3\ 4\ 3\ 4\ 4);$	$g[4]$	$g[3]$	$g[4]$	$g[3]$	$g[4]$

Таблица 3

Таблица 9x9 подмножества произведений бинарных операций на множестве из 6 чисел

$g[0] = (0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5);$	$g[0]$	$g[1]$	$g[2]$	$g[3]$	$g[4]$	$g[5]$	$g[6]$	$g[7]$	$g[8]$
$g[1] = (0\ 2\ 3\ 4\ 3\ 1);$	$g[1]$	$g[2]$	$g[3]$	$g[4]$	$g[3]$	$g[1]$	$g[2]$	$g[3]$	$g[4]$
$g[2] = (0\ 3\ 4\ 3\ 4\ 2);$	$g[2]$	$g[3]$	$g[4]$	$g[3]$	$g[4]$	$g[2]$	$g[3]$	$g[4]$	$g[3]$
$g[3] = (0\ 4\ 3\ 4\ 3\ 3);$	$g[3]$	$g[4]$	$g[3]$	$g[4]$	$g[3]$	$g[3]$	$g[4]$	$g[3]$	$g[4]$
$g[4] = (0\ 3\ 4\ 3\ 4\ 4);$	$g[4]$	$g[3]$	$g[4]$	$g[3]$	$g[4]$	$g[4]$	$g[3]$	$g[4]$	$g[3]$
$g[5] = (0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 3);$	$g[5]$	$g[6]$	$g[7]$	$g[8]$	$g[7]$	$g[5]$	$g[6]$	$g[7]$	$g[8]$
$g[6] = (0\ 2\ 3\ 4\ 3\ 4);$	$g[6]$	$g[7]$	$g[8]$	$g[7]$	$g[8]$	$g[6]$	$g[7]$	$g[8]$	$g[7]$
$g[7] = (0\ 3\ 4\ 3\ 4\ 3);$	$g[7]$	$g[8]$	$g[7]$	$g[8]$	$g[7]$	$g[7]$	$g[8]$	$g[7]$	$g[8]$
$g[8] = (0\ 4\ 3\ 4\ 3\ 4);$	$g[8]$	$g[7]$	$g[8]$	$g[7]$	$g[8]$	$g[8]$	$g[7]$	$g[8]$	$g[7]$

Рис. 4. Структуры подстановок (по табл. 3): $g[0] = (012345) = (0)(1)(2)(3)(4)(5)$; $g[1] = (0 2 3 4 3 1) = (0)[5 1 2 (3 4)]$; $g[8] = (0 4 3 4 3 4) = (0)[1(4 3)][2 (3 4)][5 (4 3)]$

Таблица 4

Таблица умножения конечного подмножества из 4-х преобразований

$g[0] = (0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33)$;	$g[0]$	$g[1]$	$g[2]$	$g[3]$
$g[1] = (10 14 18 21 25 27 29 21 25 4 31 4 31 6 16 6 16 8 16 8 10 18 10 18 12 16 12 14 14 16 23 16 23 28)$;	$g[1]$	$g[2]$	$g[3]$	$g[3]$
$g[2] = (31 16 16 18 16 14 16 18 16 25 16 25 16 29 16 29 16 25 16 25 31 16 31 16 31 16 16 16 18 16 18 14)$;	$g[2]$	$g[3]$	$g[3]$	$g[3]$
$g[3] = (16 16)$;	$g[3]$	$g[3]$	$g[3]$	$g[3]$

Рис. 5. Структуры преобразований с конвергентными свойствами: (а) структуры из 34 точек ($g[1] - g[3]$, табл. 4) и (б) структура мозаики из 36 точек ($g[1]$, табл. 6)

Визуализация структур операций этого подмножества (кроме тождественного преобразования $g[0]$) представлена на рис. 5, а.

Очевидно, что структура операции $g[3]$ (рис. 5, а) представляет собой орграф с конвергентными свойствами (все пути, сходящиеся к точке). Правая часть табл. 4, то есть таблица произведений $g[0] - g[3]$, может рассматриваться как основание для формулировки теоремы «О существовании множества преобразований с конвергентными свойствами структуры орграфа». Легко показать, что для любой таблицы (с любым конечным количеством элементов), структурно построенной по аналогии с табл. 4, обязательно существует одно преобразование, которое можно записать единственным

значением числа R . В структуре орграфа эту точку, к которой сходятся все пути (так же, как на рис. 5, а для $g[3]$, $R = 16$), назовем условно «Рим» (по старинной поговорке: «все дороги ведут в Рим»), а множество элементов такой таблицы, в которой существует «римская» точка, «римским множеством преобразований».

Результаты исследования и их обсуждение

Ниже представим перечень результатов исследований, полученных в компьютерном эксперименте, которые могут быть применены для дальнейшего анализа и изучения структур с группами нарушенной симметрии (ГНС).

эволюционных деревьев орграфа структуры и в то же время выделяет самый общий аспект исследований, важный для экономики, микробиологии, кристаллографии, астрофизики. Проблема, очевидно, выходит за рамки одной статьи, однако еще раз показывает, каким образом обнаруженное в кристаллографии П. Кюри *нарушение симметрии «творит явление»*. Всякое явление, обнаруженное в природных и социально-экономических системах, подчиняется принципу нарушения симметрии, который определяет динамику изменения симметрии и свойств системы. С точки зрения теории множеств всякое множество бинарных преобразований всегда подчиняется требованию ассоциативности и, в общем случае, является полугруппой.

Работа поддержана грантом РФФИ № 14-02-97504.

Список литературы

1. Малеев А.В., Шутов А.В., Рау В.Г. Построение квазипериодических мозаик с помощью Фурье-образов предфракталов. Труды VIII Всероссийской научной школы «Математические исследования в естественных науках» – Апатиты, 2012. – С. 21–25.
2. Никулин В.В., Шафаревич И.Р. Геометрия и группы. – М.: Наука, 1983. – 240 с.
3. Рау В.Г., Рау Т.Ф., Малеев А.В. Статистические модели в квантовой физике, экологии и экономике: учебное пособие / Рау В.Г., Рау Т.Ф., Малеев А.В. – М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2015. – 144 с.
4. Рау В.Г., Никитин О.Р., Рау Т.Ф. Фрактальная антенна в модели группы нарушенной симметрии. / Новая наука: Современное состояние и пути развития. – Уфа: АМИ – 2016. – С. 143–147.
5. Холл М. Теория групп. – М.: ИЛ, 1962 – 468 с.
6. Чупрунов Е.В. Симметрия и псевдосимметрия кристаллов / Е.В. Чупрунов. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2015. – 658 с.
7. Eugene V. Koonin The logic of chance: the nature and origin of biological evolution – Kindle Edition (USA), 2011. – 585 p.
8. Valery G. Rau, Leonty A. Lomtev and Tamara F. Rau Non-Crystallographic Symmetry in Packing Spaces. //Symmetry (USA) – 2013. – № 5. – P. 54–80.