УДК 681.2-531.7

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПЛАЙН-ФУНКЦИИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ТОЧНОСТИ ЭНКОДЕРОВ

Митрофанов С.С., Поваров К.С., Пономарёв Ю.О.

ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики», Санкт-Петербург, e-mail: kirillpovarov@yandex.com

В различных областях энкодеры находят свое применение для автоматизированного измерения углов. От их точности зависят технические возможности приборов и систем. Но в некоторых случаях требуется более высокая точность, поэтому необходимы различные методы повышения точности энкодеров. При использовании метода компенсации погрешностей необходимо предварительное исследование погрешностей энкодера. В этом исследовании по ограниченному ряду значений выявляют источники погрешностей и степени их влияния. В данной статье рассматривается метод анализа точности энкодеров с использованием аппроксимации модифицированной подпрограммой «Forit» из библиотеки стандартных программ языка «Фортран». Для получения необходимого количества анализируемых точек предложено применять интерполяцию с использованием кубических сплайн-функций, так как эта функция удовлетворяет условиям. В результате получен расчетный алгоритм, основанный на сплайн-интерполяции. Проведены контрольные расчеты.

Ключевые слова: энкодер, исследование точности, фортран

USING OF SPLINE FUNCTIONS FOR RESEARCH ACCURACY OF ENCODERS

Mitrofanov S.S., Povarov K.S., Ponomarev Y.O.

St. Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics, St. Petersburg, e-mail: kirillpovarov@yandex.com

In various fields encoders are used for the automated measurement of the angles. Their accuracy depends on the technical capabilities of devices and systems. But in some cases more precision is required, and therefore different methods to improve the accuracy of the encoders. When using the method of error compensation is necessary preliminary research encoder errors. In this study, a limited number of values identify sources of error and the extent of their influence. This article discusses the method of analysis of the accuracy of encoders using approximation routine «Forit» from the library of standard software language «Fortran». To obtain the required number of points analyzed proposed to use interpolation using cubic spline functions. Since this function satisfies the conditions. The result is a predictive algorithm based on spline interpolation. Conducted control calculations.

Keywords: encoders, research of accuracy, Fortran

Энкодеры (датчики угла поворота) находят широкое применение в устройствах для автоматизированного измерения углов, металлорежущих станках с программным управлением, в роботах и манипуляторах. От точности функционирования энкодеров во многом зависят технические возможности указанных систем. Фотоэлектрические энкодеры, являющиеся в настоящее время наиболее точными, имеют погрешность функционирования в пределах 1–5″, что в ряде случаев недостаточно [4, 5]. Повышение точности возможно, в частности, за счет применения различных методов компенсации погрешностей энкодеров. В этом случае необходимо предварительное исследование энкодера для получения информации о суммарной погрешности, анализ которой позволит определить структуру суммарной погрешности (систематическую и случайную составляющие) и степень влияния различных первичных погрешностей энкодера.

Суммарную погрешность энкодера можно описать функцией $f(x_i)$, значения которой в i-й точке диапазона [0; 2π) равны $\Delta y_{\Sigma i}$. В свою очередь $\Delta y_{\Sigma i}$ определяется суммой систематической Δy_{ci} и случайной Δy_{vi} составляющих

$$f(x_i) = \Delta y_{\Sigma i} = \Delta y_{ci} + \Delta y_{vi}. \quad (1)$$

В литературе [3, 6–9] описаны способы, позволяющие получить количественные оценки составляющих суммарной погрешности. Все их можно разбить на две большие группы: прямые и косвенные.

К прямым методам относятся полиномиальная аппроксимация по методу наименьших квадратов, метод скользящей средней, групповой метод, разностный метод, метод «скользящего сглаживания», метод «скользящего суммирования» ординат исследуемой кривой с ординатами её «зеркального отображения», а к косвенным методам – метод построения модуля вектора, метод «бега» фазы, метод построения годографа вектора. Анализ этих методов дан в [6, 7].

Экспериментальные исследования, как правило, дают лишь численные значения суммарной погрешности, поэтому всегда

необходим выбор и использование математических средств последующей обработки с целью определения её составляющих.

Анализ прямых методов показал, что:

а) первые 4 метода разработаны для случая применения линейных полиномов вида

$$d_n = \sum_{i=0}^{m} a_i n^i \quad \text{или} \quad d_n = d_0 + a_1 n, \qquad (2)$$

где a_i, a_0, a_1 – коэффициенты; m – порядок полинома, при этом полагается $dn = \Delta y_{ci}$, а

$$\Delta y_{vi} = \Delta y_{\Sigma i} - \Delta y_{ci}, \qquad (3)$$

и для другого характера изменения Δy_{ci} не применимы вследствие получения существенных ошибок в определении Δy_{ci};

б) при использовании следующих методов 5, 6 возможны потери характерных деталей структуры Δy_{ci} при неоднократном применении осреднения;

в) применение однократного осреднения дает грубые оценки составляющих;

г) методы могут использоваться лишь для предварительной оценки составляющих погрешности.

При использовании косвенных методов для выбора пробных периодов необходима исходная информация о характере периодических слагаемых, сумма которых описывает систематическую составляющую Δy_{ci} погрешности. Точность же выделения слагаемых зависит от их количества. Чем больше их содержится в исследуемой суммарной погрешности $\Delta y_{\Sigma i}$, тем грубее значения выделенной систематической составляющей. Это связано с тем, что процесс определения слагаемых Δy_{ci} носит итерационный характер. Погрешности определения параметров, главным образом начальной фазы, найденного слагаемого из первого цикла переходят во второй и т.д., накапливаются, искажая значения параметров последующих выявляемых систематических составляющих.

Поэтому эти методы наиболее эффективны для определения систематических погрешностей, имеющих не более 2–3 слагаемых, тогда относительная погрешность определения систематической составляющей суммарной погрешности может быть доведена до величины, равной 10%. Указанная оценка точности одного из методов получена в результате численного эксперимента на компьютере.

Из изложенного следует, что рассмотренные методы анализа структурного состава суммарной погрешности $\Delta y_{\Sigma i}$ в любом случае дают возможность лишь грубого разделения $\Delta y_{\Sigma i}$ на систематическую и случайную составляющие, что подтверждает сделанный ранее вывод о необходимости совершенствования этих методов в смысле повышения точности разделения погрешности и адаптации к анализу суммарных погрешностей приборов.

Разработка более точных методов разделения суммарной погрешности опирается на использование в методе 1 тригонометрической многочленной аппроксимации.

Тригонометрический многочлен вида

$$\Delta y_{ci} = A_1 \sin(x_1 + \psi_1) + ... + A_m \sin(x_m + \psi_m), \qquad (4)$$

где $A_1, A_2, ..., A_m$ – амплитуды; $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – периоды; $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ – фазы гармоник, выбран на основе точностного анализа энкодеров, проведенных в [5].

Слагаемые тригонометрического многочлена (гармоники) могут определяться при помощи гармонического анализа, входящего в пакет прикладных программ для персонального компьютера или в среде программного комплекса MAHTCAD. Эти программы гармонического анализа предназначены для анализа $\Delta y_{\Sigma i}$, определенной в диапазоне [0; 2π) числом 2^i (i – целое число), либо составлять нечетное число.

При экспериментальном исследовании точности энкодера, которое проводится при метрологической аттестации готового изделия, а также при определении возможности увеличения его точности, получают ограниченный ряд значений $\Delta y_{\Sigma i}$ в контролируемых точках диапазона [0; 2π). Аппроксимация полученных значений $\Delta y_{\Sigma i}$ рядом Фурье [7, 9] позволяет выявить составляющую Δy_{ci} и найти Δy_{vi} из выражения (3).

Найденный спектр гармоник Δy_{ci} дает возможность выявить:

– источники первичных погрешностей, а именно, детали и узлы энкодера в соответствии с величинами периодов гармоник в выражении (4);

– степень влияния выявленных источников, которая пропорциональна амплитудам гармоник.

На основе полученной информации об источниках возможно успешное решение вопросов по компенсации наиболее сильно влияющих первичных погрешностей. Реализацию аппроксимации $\Delta y_{\Sigma i}$ удобно выполнить с помощью модифицированной подпрограммы «FORIT», которая содержится в библиотеке стандартных программ на ФОРТРАНЕ.

Для получения модифицированного гармонического анализа использован рекуррентный метод, основные положения которого для случая, когда имеется нечетное число точек $\Delta y_{\Sigma i}$ на интервале [0; 2π], изложены в [6].

Примем, что функция $f(x_i)$, заданная четным числом точек $\Delta y_{\Sigma i}$, равным $n = 2(2m + 2)$, удовлетворяет условиям

Дирихле. Тогда можно записать тригонометрический многочлен вида

$$f'(\Delta y_{\Sigma i}) = A_0 + \sum_{n=1}^{m}\left(A_n \cos nx + B_n \sin nx\right), \quad (5)$$

где $n = 1, 2, \ldots, 2m$, m – некоторое чётное число; A_0, A_n, B_n – коэффициенты, причём $f'(\Delta y_{\Sigma i})$ наилучшим образом аппроксимирует функцию $f(x_i)$,

Обозначим $x = \dfrac{2\pi p}{2m+2}$, тогда

$$A_0 = \frac{1}{2(2m+2)}\sum_{n=0}^{2m+2} f(x_i) = \frac{1}{2(2m+2)}\sum_{n=0}^{2m+2} f(x_i); \quad (6)$$

$$A_n = \frac{1}{2(2m+2)}\sum_{n=0}^{2m}\Delta y_{\Sigma,n}\cos\left(\frac{2\pi pn}{2m+2}\right); \quad (7)$$

$$B_n = \frac{1}{2(2m+2)}\sum_{n=0}^{2m}\Delta y_{\Sigma,n}\sin\left(\frac{2\pi pn}{2m+2}\right). \quad (8)$$

Вычисление гармоник в выражении (5) сводится к вычислению коэффициентов A_n, B_n и A_0.

Для вычисления A_n и B_n используем рекуррентные формулы, полагая $p = 0, 1, 2, \ldots, m$, т.е.

$$\upsilon_{2m+3,p} = \upsilon_{2m+2,p} = 0; \quad (9)$$

$$\upsilon_{n,p} = \Delta y_{\Sigma,n} + 2\cos\frac{2\pi pn}{2m+2}\cdot\upsilon_{n+1,p} - \upsilon_{n+2,p}, \quad (10)$$

при $n = 2(2m + 2); 2(2m + 2) - 1, \ldots, 1$.

Подставим выражения (9) и (10) в формулы (7) и (8), и можно записать, что

$$A_n = \frac{2}{2m+2}\left(\Delta y_{\Sigma,0} + \upsilon_{1,p}\cos\frac{2\pi p}{2m+2} - \upsilon_{2,p}\right); \quad (11)$$

$$B_n = \frac{2}{2m+2}\upsilon_{1,p}\sin\frac{2\pi p}{2m+2}. \quad (12)$$

При изменении значения n, рекуррентно переходя по формулам (9)–(12), имеем

Нетрудно заметить, что коэффициенты A_n и B_n определяются каждый раз при подстановке (13) и (14) в выражение (11) и (12) при $j = 1, \ldots, 2m$.

Выражение (5) можно преобразовать к более компактному виду:

$$f(x_i) = A_0 + \sum_{n=1}^{2m} A'_n \sin(nx + \psi_n), \quad (15)$$

где $A'_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ – амплитуда гармоники, $\psi_n = \operatorname{arctg}\dfrac{|A_n|}{|B_n|}$ – начальная фаза гармоники.

Знак фазы ψ_n выбирается из анализа знаков A_n и B_n.

Эта подпрограмма вычисляет заданное количество членов ряда (16), не превышающее числа n. Максимальный порядок гармоник n определяется количеством имеющихся значений $\Delta y_{\Sigma i}$, причем выполняется соотношение

$$n = \frac{N-1}{2}, \quad (16)$$

где N – число анализируемых точек.

При использовании подпрограммы наибольшая точность достигается при N, равном любому нечетному числу $\Delta y_{\Sigma i}$.

Основным недостатком, который мешает широкому использованию указанной подпрограммы, является зависимость точности разложения от равенства $N = k$, где k – количество контролируемых значений $\Delta y_{\Sigma i}$, в интервале [0, 2π), получаемое непосредственно при измерениях. Современные высокоточные средства контроля энкодеров не обеспечивают этого равенства, например, наиболее распространенный метод контроля — метод сравнения с образцовой многогранной призмой [4] – позволяет получить ограниченное количество k значений $\Delta y_{\Sigma i}$ равное числу граней призмы, которое, для случая кодового энкодера, не превышает 32. Кроме того, при этом методе не выполняется условие достоверного разложения в ряд (4), имеющее вид $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$ при $m > 15$. Однако в энкодерах, особенно накапливающего

$$\upsilon_{n+1}\sin\frac{2\pi pn}{2m+2} = \sum_{j=n+1}^{2m}\Delta y_{\Sigma,1}\sin(j-n)\frac{2\pi p}{2m+2} = \sum_{j=n}^{2m}\Delta y_{\Sigma,j}\sin(j-n)\frac{2\pi p}{2m+2} \quad (13)$$

и

$$\left(\Delta y_{\Sigma i,n} + 2\cos\frac{2\pi pn}{2m+2}\upsilon_{n+1} - \upsilon_{n+2}\right)\sin\frac{2\pi pn}{2m+2} =$$

$$= \Delta y_{\Sigma,n}\sin\frac{2\pi pn}{2m+2} + \sum_{j=n+1}^{2m}\Delta y_{\Sigma,j}\left[2\cos\frac{2\pi pn}{2m+2}\sin(j-n)\frac{20\pi pn}{2m+2} - \sin(j-n-1)\frac{2\pi pn}{2m+2}\right] = \quad (14)$$

$$= \Delta y_{\Sigma,n}\sin\frac{2\pi pn}{2m+2} + \sum_{j=n+1}^{2m}\Delta y_{\Sigma,j}\sin(j-n+1)\frac{2\pi pn}{2m+2} = \upsilon_n\sin\frac{2\pi pn}{2m+2}.$$

типа, следует ожидать наличия короткопериодических составляющих погрешности [5]. Этот недостаток можно обойти за счёт увеличения количества анализируемых точек N путём проведения дополнительных измерений $\Delta y_{\sum i}$ в окрестностях в каждой из k точек и с помощью методов интерполяции увеличить k до N. Применение известных алгоритмов интерполяции на основе методов Ньютона, Гаусса, Бесселя и некоторых комбинированных алгоритмов, в основе которых лежит линейная интерполяция, не позволяет получить высокой точности из-за плохой сходимости ряда (4) и получения полиномов высокой степени. В связи с этим разработан алгоритм интерполяции с использованием кубических сплайн-функций [10], подробное изложение теории которых приведено в [1]. Отметим лишь условия, которым должна удовлетворять интерполируемая функция $f(x_i)$:

– функция должна быть непрерывна на всем интервале $[0, 2\pi)$ с аргументами $[x_1, x_k]$.

– первая и вторая производные $f(x_i)$ и $f''(x_i)$ непрерывны на $[x_1, x_k]$.

– вторые производные в конечных точках равны нулю

$$f''(x_1) = f''(x_k) = 0.$$

В работе [1] показано, что такая функция, обладающая свойством наименьшей кривизны, является единственной.

Известно, что кубическая сплайн-функция состоит из $(k - 1)$ отрезков кубических кривых, каждый из которых имеет четыре параметра и, следовательно, чтобы однозначно определить кубический сплайн, необходимо вычислить $4(k - 1)$ параметра. Используя отмеченные ниже условия и учитывая требование $f(x_i) = \Delta y_{\sum i}$ для $i = 1, ..., k$, можно получить систему из $4(k - 1)$ уравнений с $4(k - 1)$ неизвестными, которая имеет единственное решение. Учет спектрального состава функции $f(x_i)$ и оценка соотношения максимальной гармоники спектра и величины ε-окрестности узлов интерполяции для данной реализации позволяет ввести следующие соотношения:

$$f''_{+}\left(x_i - \varepsilon\right) = f''_{-}\left(x_i - \varepsilon\right)$$

и

$$f''_{+}\left(x_i + \varepsilon\right) = f''_{-}\left(x_i + \varepsilon\right),$$

из которых видно, что происходит снижение неопределенности исследуемой функции внутри интервалов интерполяции (x_i, x_{i+1}). При выборе двух дополнительных точек внутри интервалов (x_i, x_{i+1}), как показали проведённые контрольные просчеты, уже дают приемлемые результаты.

Анализ процесса, который описывается последовательностью $\Delta y_{\sum i}$ в ε-окрестности, позволил считать его стационарным, поэтому предложенный прием позволяет получить дополнительное число значений $\Delta y_{\sum i}$ с интервалом (x_i, x_{i+1}), чтобы выдержать соотношение (4) и $m = n$ при $N = k + N'$, где N' – число значений $\Delta y_{\sum i}$, полученное за счет применения сплайн-интерполяции. Теперь становится возможным использование модифицированной подпрограммы «FORIT» без потери точности разложения и получение полного спектра гармоник суммарной погрешности энкодера.

Предложенный способ был реализован с использованием методики вычисления сплайна, изложенной в [10], и подпрограммы «FORIT» и также отлажен пакет программ анализа точности энкодеров.

Применение разработанной методики для анализа точности фотоэлектрических энкодеров комбинированного типа проводилось на основе исследования $\Delta y_{\sum i}$ партии из 70 энкодеров, изготовленных на одном предприятии. Исследованные энкодеры имели следующие параметры:

– диапазон измеряемых углов $[0, 2\pi)$;

– дискретность отсчета 1,24″;

– допускаемая суммарная погрешность (по паспорту) 4,4″;

– двоичный последовательный код на выходе.

Измерялась $\Delta y_{\sum i}$ в $N = 32$ точках диапазона, т.е. дискретность измерения составляла 11,25°.

Было получено выражение для Δy_{ci} в виде

$$\Delta y_{ci} = 0{,}65''\sin''(x + 4{,}83) + 0{,}60''\sin(2x + 1{,}26) + \\ + 0{,}79''\sin(4x + 4{,}67) + 0{,}22''\sin(9x - 1{,}53) + \\ + 0{,}42''\sin(20x + 1{,}34),$$

из которого видно наличие гармоники, имеющей угловой период изменения $T_{20} \cong 18°$, являющейся результатом погрешности положения считывающих окон индикаторного лимба, расположенных через 18°.

Список литературы

1. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Книга по Требованию, 2012. – 319 с.

2. Бартеньев О.В. Современный Фортран. – 3-е изд., доп. и перераб. – М.: ДИАЛОГ- МИФИ, 2000. – 449 с.

3. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Т. 1. – М.: Мир, 1971. – 316 с.

4. Иванов Б.Н. О проверке преобразователей угла поворота в код // Измерительная техника. – 1974. – № 3. – С. 20.

5. Латыев С.М. Конструирование точных (оптических) приборов. – СПб.; Изд-во «Лань», 2015. – 560 с.

6. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.

7. Серебрянников М.Г. Гармонический анализ. – М.; Гостехиздат, физ. мат. литературы, 1962.

8. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2002. – 608 с.

9. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – Т. 2. – М.: Госиздат физ.мат. литературы, 1962.

10. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980.